

Física (Informática de Gestión)

Soluciones (Septiembre de 2000)

PROBLEMA 2.1.1.

Dado el sistema de cargas puntuales que se muestra en la figura P2.1.1, calcular la energía electrostática del sistema.

Si la carga $2q$ situada en el origen se duplica, ¿cuánto cambia la energía electrostática?

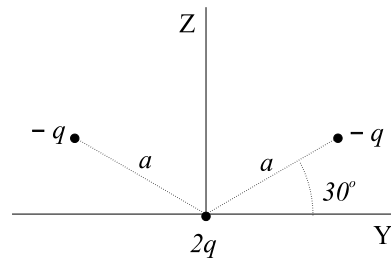


Figura P2.1.1

SOLUCIÓN:

La energía electrostática de un sistema de cargas viene dado por la expresión

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} q_i V_i$$

Los vectores de posición de las cargas son

$$q_1 = -q, \quad \mathbf{r}_1 = -a \cos 30 \mathbf{u}_y + a \sin 30 \mathbf{u}_z = -\frac{a\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_y + \frac{a}{2} \mathbf{u}_z$$

$$q_2 = -q, \quad \mathbf{r}_2 = a \cos 30 \mathbf{u}_y + a \sin 30 \mathbf{u}_z = \frac{a\sqrt{3}}{2} \mathbf{u}_y + \frac{a}{2} \mathbf{u}_z$$

$$q_3 = 2q, \quad \mathbf{r}_3 = 0$$

Y además

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = 2a \cos 30 = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| &= a \\ |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| &= a \end{aligned}$$

Y en potencial en cada punto debido al resto de las cargas es

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{2\sqrt{3}} + \frac{2q}{a} \right]$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{2\sqrt{3}} + \frac{2q}{a} \right] = V_1$$

$$V_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{a} + \frac{-q}{a} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2q}{a} \right]$$

Sustituyendo en la expresión general tenemos

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(-q) \left(\frac{-q}{2\sqrt{3}} + \frac{2q}{a} \right) + (-q) \left(\frac{-q}{2\sqrt{3}} + \frac{2q}{a} \right) + 2q \left(\frac{-2q}{a} \right) \right]$$

Reorganizando términos

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 4 \right)$$

Si q_3 se duplica la energía del sistema resulta

$$W' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 8 \right)$$

Por tanto, la diferencia de energía es

$$\Delta W = W' - W = \frac{-q^2}{\pi\epsilon_0}$$

PROBLEMA 2.1.2.

En la figura P2.1.2a se muestra un circuito de corriente continua. Calcular la corriente que circula por cada pila e indicar cual de las pilas recibe o suministra energía.

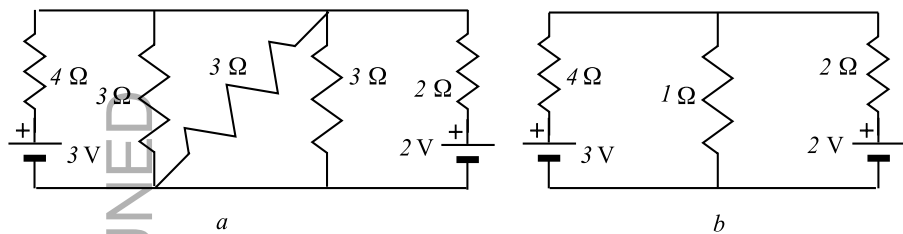


Figura P2.1.2

SOLUCIÓN:

Antes de resolver el circuito por el método de mallas, lo reducimos a dos mallas ya que las tres resistencias centrales están en paralelo y no hay pilas en esas ramas. El circuito equivalente se muestra en la figura P2.1.2b, donde la resistencia equivalente es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

luego $R = 1\Omega$

El sistema de ecuaciones del circuito, suponiendo que las corrientes van en el sentido de las agujas del reloj, es

$$\begin{aligned} 3 &= (4 + 1)i_1 - i_2 \\ -2 &= -i_1 + (2 + 1)i_2 \end{aligned}$$

Resolviendo por Cramer

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}\text{A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2}\text{A}$$

Puesto que i_2 resulta negativa, el sentido de la corriente es contrario al supuesto. Es decir, la corriente en la malla 2 va en sentido contrario a las agujas del reloj. Las dos baterías suministran energía.

PROBLEMA 2.1.3.

Una espira sobre el plano YZ como la indicada en la figura P2.1.3 está en presencia de un campo magnético variable $\mathbf{B} = B_o(\cos 60^\circ \mathbf{u}_x + \sin 60^\circ \mathbf{u}_y) \cos \omega t$. Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

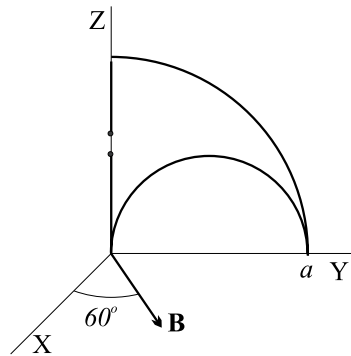


Figura P2.1.3

SOLUCIÓN:

El flujo que atraviesa la espira será el flujo que atraviesa el cuarto de espira de radio a y centrada en el origen, menos el flujo a través de la semiespira de radio $a/2$, centrada en $(0, a/2, 0)$. Puesto que el campo es uniforme en todo el plano YZ, el flujo a través del cuarto de espira viene dado por

$$\Phi_1 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_1$$

donde

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{4}\pi a^2 \mathbf{u}_x$$

Luego

$$\Phi_1 = B_o(\cos 60^\circ \mathbf{u}_x + \sin 60^\circ \mathbf{u}_y) \cos \omega t \cdot \left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) \mathbf{u}_x$$

$$\Phi_1 = B_o \cos 60^\circ \cos \omega t \left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x) = \frac{1}{8}\pi a^2 B_o \cos \omega t$$

Y el flujo a través de la semiespira será

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}_2$$

donde

$$\mathbf{S}_2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \mathbf{u}_x$$

Luego

$$\Phi_2 = B_o(\cos 60^\circ \mathbf{u}_x + \sin 60^\circ \mathbf{u}_y) \cos \omega t \cdot \left(\frac{1}{8}\pi a^2\right) \mathbf{u}_x$$

$$\Phi_2 = B_o \cos 60^\circ \cos \omega t \left(\frac{1}{8}\pi a^2\right) (\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x) = \frac{1}{16}\pi a^2 B_o \cos \omega t$$

El flujo neto a través de la espira del problema es

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi a^2 B_o \cos \omega t$$

Y la f.e.m. inducida es

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{16}\pi a^2 \omega B_o \sin \omega t$$